Kapitola 2. Posloupnosti

2.1. Úvodní definice

Definice 2.1:
Posloupností $(a_n)_{n=n_0}^{\infty}$ rozumíme předpis, který každému $n \in N, n \geq n_0$ přiřadí reálné resp komplexní číslo a_n. Toto a_n nazveme n-tým členem posloupnosti $(a_n)_{n=n_0}^{\infty}$.

Definice 2.2:
Posloupnost (a_n) je shora omezená, je-li $\{a_n; n \in N\}$ shora omezená.
Posloupnost (a_n) je zdola omezená, je-li $\{a_n; n \in N\}$ zdola omezená.
Posloupnost (a_n) je omezená, je-li shora omezená a zdola omezená.

Definice 2.3:
Posloupnost (a_n) je klesající, jestliže $\forall n \in N : a_n > a_{n+1}$.
Posloupnost (a_n) je rostoucí, jestliže $\forall n \in N : a_n < a_{n+1}$.
Posloupnost (a_n) je nerostoucí, jestliže $\forall n \in N : a_n \geq a_{n+1}$.
Posloupnost (a_n) je neklesající, jestliže $\forall n \in N : a_n \leq a_{n+1}$.
Posloupnost (a_n) je monotonní, jestliže je nerostoucí nebo neklesající.
Posloupnost (a_n) je ryze monotonní, jestliže je rostoucí nebo klesající.

2.2. Konvergentní posloupnosti

Definice 2.4:
Řekneme, že posloupnost (a_n) má limitu $a \in R$ (značíme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ nebo $a_n \to a$), jestliže

$$\forall \epsilon \in (0,\infty) \exists n_0 \in N \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \epsilon.$$

Poznámka
Posloupnosti, které mají limitu $a \in R$ nazveme konvergentní posloupnosti nebo posloupnosti s vlastní limitou.

Věta 2.1: (Jednoznačnost limity)
Jestliže $a_n \to a$ a současně $a_n \to b$, pak $a = b$.

Věta 2.2: (Konvergence a omezenost)
Je-li posloupnost (a_n) konvergentní, pak je omezená.

Důsledek:
Jestliže $a_n \to a > 0$, pak existuje n_0 tak, že pro všechna $n \geq n_0$ je $a_n > \frac{a}{2}$.

Věta 2.3: (Aritmetika limit)
Jestliže $a_n \to a, b_n \to b, a, b \in R$, pak platí
(i) $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$,
(ii) $\lim_{n\to\infty}(a_n.b_n) = a.b$.
(iii) Je-li navíc $b \neq 0$, pak $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$.

Poznámky
Větu 3 je možné v několika směrech zobecnit. Často budeme používat tato tvrzení:

a. Je-li (a_n) omezená, $b_n \to 0$, pak $a_n.b_n \to 0$,
b. $a_n \to a \Rightarrow |a_n| \to |a|$,
c. $a_n \to 0 \Leftrightarrow |a_n| \to |a|$.

Věta 2.4: (Limita a nerovnosti)
Nechť $a_n \to a, b_n \to b$. Pak platí
Jestliže $\exists n_0 \forall n \geq n_0 : a_n \leq b_n$, pak $a \leq b$.
Jestliže $a < b$, pak $\exists n_0 \forall n \geq n_0 : a_n < b_n$.

Věta 2.5: (Věta o dvou policajtech)
Nechť $\exists n_0 \forall n \geq n_0 : a_n \leq b_n \leq c_n$ a $a_n \to a, c_n \to a$.
Pak existuje $\lim_{n\to\infty} b_n = a$.

2.3. Nevlastní limity

Definice 2.5
Označme $R^* = R \cup \{\infty, -\infty\}$.Pro každé $\epsilon > 0$ definujeme
$U(\infty, \epsilon) = P(\infty, \epsilon) = (\frac{1}{\epsilon}, \infty), U(-\infty, \epsilon) = P(-\infty, \epsilon) = (-\infty, -\frac{1}{\epsilon})$.

Definice 2.6:
Buď $a \in R^*$. Řekneme, že posloupnost (a_n) má limitu a (značíme $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ nebo $a_n \to a$), jestliže

$$\forall \epsilon \in (0, \infty)\ \exists n_0 \in N\ \forall n \geq n_0 : a_n \in U(a, \epsilon).$$

Poznámka:
I pro nevlastní limity platí věta o jednoznačnosti limity, posloupnost, která má nevlastní limitu, však není omezená.

Věta 2.6: (Aritmetika limit znovu)
Buďte $a, b, \in R^*, a_n \to a, b_n \to b$. Pak
(i) $a_n + b_n \to a + b$,
(ii) $a_n.b_n \to a.b$,
(iii) $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$,
kdykoliv mají výrazy na pravé straně smysl.

Poznámky
(i) Nejsou definovány (nemají smysl) výrazy $\infty - \infty, 0.\infty, \frac{a}{0}, \frac{\infty}{\infty}$.
(ii) Jestliže $a_n \to \infty, (b_n)$ je zdola omezená, pak $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \infty$.
(iii) Jestliže $a_n \to \infty, (b_n)$ je zdola omezená kladnou konstantou, pak

$$\lim_{n\to\infty}(a_n.b_n) = \infty.$$

(iv) Je-li $\lim_{n\to\infty} b_n = 0, b_n > 0$ pro všechna dostatečně velká n, pak $\frac{1}{b_n} \to \infty$.

2.4. Hlubší věty o posloupnostech

Definice 2.7
Buď $M \neq \emptyset$. Není-li M shora omezená, definujeme $\sup M = \infty$, není-li M zdola omezená, definujeme $\inf M = -\infty$. Dále položme $\sup \emptyset = -\infty, \inf \emptyset = \infty$.

Věta 2.7: (O limitě monotonní posloupnosti)
Buď (a_n) monotonní. Pak existuje $a \in R^*$ tak, že $a_n \to a$.

Definice 2.8 (Vybraná posloupnost)
Buď $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ rostoucí posloupnost přirozených čísel. Pak posloupnost $(b_k)_{k=1}^{\infty}$ je vybraná posloupnost (z posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$), jestliže

$$b_k = a_{n_k}, \quad \forall k \in N.$$

Lemma 2.1:
Je-li $a_n \to a, (a_{n_k})$ vybraná posloupnost, pak $a_{n_k} \to a$.

Definice 2.9 (Hromadné hodnoty posloupnosti)
$a \in R^*$ je hromadnou hodnotou posloupnosti (a_n), jestliže existuje vybraná posloupnost (a_{n_k}) tak, že $a_{n_k} \to a$. Množinu všech hromadných hodnot posloupnosti (a_n) značíme $H((a_n))$.

Definice 2.11 (Limita superior a inferior)
Je-li posloupnost (a_n) shora omezená, definujeme limitu superior (značíme $\overline{\lim}\, a_n$ nebo limsupa_n) takto:

$$\overline{\lim}\, a_n = \lim b_n, \text{ kde } \quad b_n = \sup\{a_k; k \geq n\}.$$

Není-li (a_n) shora omezená, definujeme $\overline{\lim}\, a_n = \infty$.
Je-li posloupnost (a_n) zdola omezená, definujeme limitu inferior (značíme $\underline{\lim}$ nebo liminfa_n) takto:

$$\underline{\lim}\, a_n = \lim c_n, \text{ kde } \quad c_n = \inf\{a_k; k \geq n\}.$$

Není-li (a_n) zdola omezená, definujeme $\underline{\lim}\, a_n = -\infty$.

Věta 2.9: (Limita superior a limita inferior jsou hromadné hodnoty)
Buď (a_n) posloupnost reálných čísel Pak $\overline{\lim}\, a_n$ je maximem množiny $H((a_n))$ a $\underline{\lim}\, a_n$ je minimem množiny $H((a_n))$.

Věta 2.10: (Bolzano-Weierstrassova)
Buď (a_n) omezená posloupnost. Pak existuje vybraná posloupnost (a_{n_k}), která je konvergentní.

Definice 2.9 (Cauchyovské posloupnosti)
Řekneme, že posloupnost (a_n) je cauchyovská (splňuje BCP), jestliže

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists n_0 \; \forall n, m \geq n_0 : |a_n - a_m| < \epsilon.$$

Lemma 2.2:
Každá konvergentní posloupnost je cauchyovská.

Lemma 2.3:
Každá cauchyovská posloupnost je omezená.

Lemma 2.4:
Je-li (a_n) cauchyovská a vybraná posloupnost (a_{n_k}) konvergentní, pak je i (a_n) konvergentní.

Věta 2.11: (Bolzano-Cauchyova)
Posloupnost (a_n) je konvergentní právě tehdy, je-li cauchyovská.